ОБЪ ОДНОМЪ ЭМПИРИЧЕСКОМЪ ВЫРАЖЕНІИ

ЗАКОНА СМЕРТНОСТИ.

Академика В. Я. Буняковскаго.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.

ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

(В. О., 9 лин. № 12.)

1869.

ОБЪ ОДНОМЪ ЭМПИРИЧЕСКОМЪ ВЫРАЖЕНІИ

ЗАКОНА СМЕРТНОСТИ.

Академика В. Я. Буняковскаго.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ

ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

(В. О., 9 лин. № 12.)

1869.

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.
Санктпетербургъ, апрѣль 1869 г.

Непремѣнный Секретарь, Академикъ *К. Веселовскій.*

ОБЪ ОДНОМЪ ЭМПИРИЧЕСКОМЪ ВЫРАЖЕНІИ

ЗАКОНА СМЕРТНОСТИ.

Академика В. Я. Буняковскаго.

(Читано въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 8 апрѣля 1869 г.)

Рѣшеніе вопросовъ, относящихся къ застрахованіямъ капиталовъ и пожизненныхъ доходовъ, основано, какъ извѣстно, на болѣе или менѣе сложныхъ совокупленіяхъ роста процентовъ съ указаніями таблицъ смертности. При разнообразіи условій застрахованія, нѣкоторые вопросы этого рода приводятъ къ численнымъ выкладкамъ, которыя, даже при пособіи разныхъ вспомогательныхъ таблицъ, чрезвычайно утомительны по своей продолжительности. Въ подобныхъ случаяхъ, а также и при рѣшеніи многихъ другихъ вопросовъ о вѣроятностяхъ жизни человѣческой, трудъ облегчился бы значительно, еслибъ удалось законъ смертности выразить несложною аналитическою формулою, опредѣляющею слѣдовательно, сколько, изъ извѣстнаго числа новорожденныхъ, остается въ живыхъ во всякомъ данномъ возрастѣ.—Желаніе облегчить такимъ образомъ работу вычислителей побудило нѣкоторыхъ математиковъ искать эмпирическихъ формулъ, которыя связывали бы между собою, съ достаточнымъ приближеніемъ, послѣдовательныя указанія таблицъ смертности.

Было предложено нѣсколько попытокъ такого рода; между прочимъ можно указать на формулы *Моавра* и *Ламберта* *). Въ новѣйшее время вышла книга подъ заглавіемъ: *Sterblichkeit- und Versicherungswesen* (Braunschweig, 1868), авторъ которой, *Германъ Шефлеръ*, задался тою же самою задачею. Прежде всего, изъ многихъ таблицъ, онъ составилъ одну *таблицу средней смертности*, и указанія ея раздѣлилъ на *три* группы, соотвѣтствующія слѣдующимъ возрастнымъ періодамъ: отъ рожденія до 6 лѣтъ включительно, отъ 7-ми до 80-ти лѣтъ и отъ 81 года до 95-ти лѣтъ. За кривую смертности каждаго изъ этихъ трехъ возрастныхъ періодовъ онъ принялъ обыкновенную параболу, опредѣляемую уравненіемъ

$$y = a + bx + cx^2,$$

разумѣя подъ x данный возрастъ, а подъ y число доживающихъ до этого возраста изъ 100000 новорожденныхъ. Для каждой изъ трехъ группъ авторъ опредѣлилъ численныя величины коэффиціентовъ a, b и c. Результаты вычисленія для второй группы, то есть отъ 7-ми до 80-ти лѣтъ, довольно удовлетворительно согласуются съ непосредственными указаніями таблицы средней смертности; но для младшихъ возрастовъ, и въ особенности для возрастовъ свыше 80 лѣтъ, формулы г. *Шефлера* приводятъ къ выводамъ, значительно уклоняющимся отъ прямыхъ указаній.

Въ предлагаемой запискѣ я также вывожу эмпирическій законъ смертности; но я поступилъ нѣсколько иначе чѣмъ мои предшественники. Вмѣсто того, чтобы непосредственно искать зависимость между возрастомъ и числомъ лицъ, доживающихъ до этого возраста при данномъ итогѣ новорожденныхъ, я принялъ въ соображеніе другой элементъ жизненности, именно *среднюю жизнь*; элементъ этотъ я предпочелъ другимъ по той причинѣ, что послѣдовательныя его измѣненія представляютъ, какъ уви-

*) Смот. *Основанія математической теоріи вѣроятностей*, соч. В. Буняковскаго, стр. 176.

димъ ниже, особенно-наглядную правильность. Далѣе, основываясь на замѣченной, весьма простой, зависимости *средней жизни* отъ *возраста*, я вывелъ уже аналитическимъ путемъ и самый *законъ смертности*.

Прежде нежели изложу употребленные мною пріёмы, скажу нѣсколько словъ о *таблицѣ смертности Депарсьё*, на указаніяхъ которой я основалъ предлагаемые въ этой статьѣ результаты. Въ 1746 году Депарсьё издалъ книгу подъ заглавіемъ: *Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine*. Въ этомъ сочиненіи авторъ, съ замѣчательною ясностію, изложилъ пріёмы, которыми онъ руководствовался при вычисленіи нѣсколькихъ таблицъ смертности; главная изъ нихъ составлена на основаніи данныхъ, заимствованныхъ изъ весьма вѣрныхъ списковъ тонтинёровъ съ 1689 по 1696 годъ; прочія, относящіяся къ нѣкоторымъ монашескимъ орденамъ, мужскимъ и женскимъ, вычислены имъ же по вѣдомостямъ и смертнымъ спискамъ лицъ, послѣдовательно поступавшихъ въ монашество. Кромѣ таблицъ смертности, въ сочиненіи Депарсьё есть много *таблицъ тарифныхъ*, предназначенныхъ для вычисленія срочныхъ уплатъ, премій по застрахованію капиталовъ и пожизненныхъ доходовъ при разныхъ нормахъ процентовъ, для расчётовъ по нѣкоторымъ особаго рода тонтинамъ и проч.

Всѣ подробности, относящіяся къ составленію первой изъ упомянутыхъ таблицъ смертности, которую я и буду употреблять въ дальнѣйшемъ изложеніи, помѣщены въ названномъ выше сочиненіи Депарсьё; скажу только, что она вычислена на основаніи данныхъ, заслуживающихъ полнаго довѣрія. Понятно, что вѣдомости объ участникахъ въ тонтинѣ, о возрастѣ ихъ поступленія, и о лѣтахъ ихъ смерти, велись съ возможною точностію; изъ этихъ-то списковъ, заключавшихъ въ себѣ значительное число тонтинёровъ, Депарсьё и вывелъ, строгимъ образомъ, главныя указанія для своей таблицы, именно указанія чрезъ каждое возрастное пятилѣтіе, а цифры для промежуточныхъ годовыхъ возрастовъ вычислилъ посредствомъ тройнаго правила. По причинѣ

значительной неправильности въ ходѣ смертности въ первые годы жизни младенцевъ, Депарсьё началъ свою таблицу только съ 3-хъ лѣтняго возраста; послѣднее же показаніе въ ней относится къ 94 годамъ. Достоинство этой таблицы признано статистиками, о чемъ свидѣтельствуетъ между прочимъ то̀, что и въ наше время она послужила основаніемъ при составленіи нѣкоторыхъ тарифовъ или указателей нормы премій, платимыхъ въ извѣстныхъ возрастахъ и при различныхъ условіяхъ за страхованіе капиталовъ и пожизненныхъ доходовъ. Такъ въ 1850 г. учреждена во Франціи Касса подъ названіемъ: *Caisse de retraites pour la vieillesse*, и всѣ расчёты ея основаны на таблицѣ Депарсьё. Она принята была также и въ Англіи нѣкоторыми Обществами застрахованія жизни. Впрочемъ, должно замѣтить, что частныя общества такого рода, въ особенности во Франціи, имѣя въ виду, что таблица Депарсьё составлена для класса людей вообще безбѣдныхъ, и поэтому менѣе подверженныхъ вліянію нѣкоторыхъ причинъ смертности, употребляютъ ея указанія только для опредѣленія размѣра премій по застрахованіямъ пожизненныхъ доходовъ; что̀ же касается до выдачъ, производимыхъ по смерти вкладчика, то въ этомъ случаѣ премію они вычисляютъ по другимъ таблицамъ, усиливающимъ смертность, напримѣръ, не рѣдко, по таблицѣ *Дювиллара*.

Въ концѣ этой Записки приведена *таблица смертности Депарсьё* *) *(Таблица 1-ая)*, заключающая въ себѣ, сверхъ обыкновенныхъ указаній о числѣ остающихся въ живыхъ въ различныхъ возрастахъ изъ 1000 3-хъ лѣтнихъ младенцевъ, соотвѣтствующія этимъ возрастамъ цифры *средней жизни*, выраженныя въ годахъ и мѣсяцахъ; всѣ эти данныя прямо взяты изъ сочиненія Депарсьё. Кромѣ того, въ 4-ой графѣ *Таблицы 1-ой*, я помѣстилъ *разности* между смежными величинами средней жизни. Пробѣгая эти разности замѣчаемъ, что начиная съ 10-ти лѣт-

*) Таблица *Депарсьё* постоянно перепечатывается въ извѣстномъ ежегодномъ изданіи: *Annuaire du Bureau des longitudes*.

няго возраста и до 68-го, онѣ не выходятъ изъ довольно тѣсныхъ предѣловъ 7 и 9 мѣсяцевъ, и при томъ, по величинѣ своей, перемежаются неправильно, не обнаруживая никакихъ особенныхъ колебаній въ одну сторону въ теченіе всего этого 57-ми-лѣтняго промежутка. Поэтому, — не имѣя конечно въ виду найти строгій законъ измѣненія средней жизни, недоступный для насъ, и къ тому жъ видоизмѣняющійся вслѣдствіе разныхъ неуловимыхъ для насъ случайностей, — а желая только получить удовлетворительное въ практическомъ отношеніи приближеніе къ сказанному закону, мы можемъ принять, что *между 10 и 68 лѣтними возрастами средняя жизнь измѣняется въ убывающей ариѳметической прогрессіи*. Допустивъ это свойство, выведемъ и самую прогрессію, а изъ нея уже и *законъ смертности*.

Пусть будетъ n разсматриваемый *возрастъ*, а V_n *средняя жизнь*, ему соотвѣтствующая. На основаніи сдѣланнаго сей-часъ замѣчанія о приблизительной неизмѣняемости первыхъ разностей этого элемента, получимъ:

$$V_n = a - bn\,, \qquad (1)$$

разумѣя подъ a и b двѣ постоянныя величины, которыя слѣдуетъ опредѣлить напвыгоднѣйшимъ образомъ. Для этого мы употребимъ *способъ наименьшихъ квадратовъ* принявъ, напримѣръ, за наблюденныя величины *семь* значеній средней жизни V_n, именно для $n = 10$, 20, 30, 40, 50, 60 и 70. Такимъ образомъ примѣняя къ настоящему вопросу извѣстныя формулы

$$a = \frac{\Sigma(n^2)\,.\,\Sigma(V_n) - \Sigma(n)\,.\,\Sigma(nV_n)}{s\,\Sigma(n^2) - [\Sigma(n)]^2}\,,$$

$$b = \frac{\Sigma(n)\,.\,\Sigma(V\ ) - s\,\Sigma(nV_n)}{s\,\Sigma(n^2) - [\Sigma(n)]^2}\,,$$

и имѣя при томъ въ виду опредѣлить a и b по таблицѣ Депарсьё (Смот. *Таблицу 1-ую*), получимъ

$$V_{10} = 46^{л.}\ 10^{м.},\quad V_{20} = 40^{л.}\ 3^{м.},\quad V_{30} = 34^{г.}\ 1^{м.},$$
$$V_{40} = 27^{л.}\ 6^{м.},\quad V_{50} = 20^{л.}\ 5^{м.},\quad V_{60} = 14^{л.}\ 3^{м.},$$
$$V_{70} = 8^{л.}\ 8^{м.};$$

$$s = 7, \quad \Sigma(n) = 280, \quad \Sigma(n^2) = 14000,$$
$$[\Sigma(n)]^2 = 78400, \quad \Sigma(V_n) = 192 \text{ года},$$
$$\Sigma(nV_n) = 5878 \text{ лѣтъ } 4 \text{ мѣс.}$$

Внося эти величины въ предыдущія формулы, найдемъ

$$a = 53^{\text{г.}}\ 2^{\text{м.}}, \quad b = 7^{\text{м.}}\ 22^{\text{дня}},$$

и слѣдовательно

$$V_n = 53^{\text{г.}}\ 2^{\text{м.}} - 7^{\text{м.}}\ 22^{\text{д.}} \times n. \qquad (2)$$

Вотъ та линейная зависимость между *среднею жизнію* V_n и *возрастомъ* n, которая должна послужить намъ для опредѣленія самаго *закона смертности*. Но прежде нежели перейдемъ къ его выводу, сдѣлаемъ нѣкоторыя замѣчанія, вытекающія изъ сравненія указаній *Таблицы 2-й*, въ которой мы привели цифры *средней жизни* по таблицѣ Депарсьё и соотвѣтственныя имъ указанія, вычисленныя по формулѣ (2); при этомъ вычисленіи, для бо́льшей точности, мы приняли, круглымъ числомъ, по $30\frac{1}{2}$ дней въ каждомъ мѣсяцѣ. Кромѣ того, для наглядности, мы внесли въ таблицу разности между наблюденными и теоретическими указаніями продолжительности *средней жизни*, считая мѣсяцъ въ 30 дней.

Обозрѣніе ряда разностей прямо показываетъ, что начиная съ 7-ми лѣтняго возраста и до 72-хъ лѣтъ включительно, теоретическія указанія уклоняются отъ цифръ Депарсьё, по избытку или по недостатку, менѣе чѣмъ на *одинъ годъ*, при чемъ уклоненій ме́ньшихъ полу-года или *шести мѣсяцевъ* числомъ 53, а бо́льшихъ *шести мѣсяцевъ* только 13, то есть *пятая доля* всѣхъ 66 разсматриваемыхъ указаній. Такое согласіе въ числахъ, величины которыхъ находятся въ зависимости отъ столькихъ разнообразныхъ причинъ, не подлежащихъ нашей оцѣнкѣ, нельзя не считать, какъ мнѣ кажется, весьма удовлетворительнымъ. Уклоненія, превышающія *одинъ годъ*, относятся къ первымъ четыремъ годамъ таблицы Депарсьё, именно къ 3-му, 4-му, 5-му и 6-му, а также къ преклоннымъ возрастамъ, начиная съ 73 лѣтъ. Относительно послѣднихъ должно принять въ соображеніе и то, что опредѣленіе, по наблюденіямъ, соотвѣтственныхъ имъ значеній продолжитель-

ности средней жизни, не можетъ имѣтъ той степени надежности какъ для возрастовъ среднихъ, по причинѣ сравнительной малочисленности лицъ, достигающихъ преклонныхъ лѣтъ. Поэтому, сличая между собою различныя таблицы смертности, не рѣдко замѣчаемъ между ними удовлетворительное согласіе въ показаніяхъ для среднихъ возрастовъ, и, напротивъ того, рѣзкія разногласія относительно старшихъ и въ особенности преклонныхъ лѣтъ. Во всякомъ случаѣ, употребленіе формулы (2), по примѣняемости ея къ таблицѣ Депарсьё, мы предлагаемъ только въ предѣлахъ отъ 7-ми до 72-хъ лѣтъ.

Обратимся теперь къ выводу *закона смертности.* Чтобы получить аналитическое выраженіе этого закона, стоитъ только совокупить уравн. (1) съ извѣстною формулою, связывающею величину средней жизни съ послѣдовательными указаніями таблицы смертности. Пусть будутъ

$$y_0, \; y_1, \; y_2 \cdots y_{n-1}, \; y_n, \; y_{n+1} \cdots$$

указанія употребляемой таблицы, соотвѣтствующія возрастамъ *нуль* лѣтъ, то есть числу новорожденныхъ, 1-му году, 2 годамъ .... $n-1$, n, $n+1$ ... годамъ и такъ далѣе. Изобразимъ, какъ выше, чрезъ V_{n-1} и V_n значенія средней жизни въ возрастахъ $n-1$ и n лѣтъ. Между V_{n-1} и V_n, какъ извѣстно, существуетъ слѣдующее соотношеніе:

$$V_{n-1} = \frac{1}{2} + \left(V_n + \frac{1}{2}\right)\frac{y_n}{y_{n-1}}.$$

Вносся въ это уравненіе величины

$$V_{n-1} = a - b\,(n-1) \quad \text{и} \quad V_n = a - bn,$$

опредѣлямыя формулою (1), получимъ

$$y_n = \frac{\frac{a+b-\frac{1}{2}}{b} - n}{\frac{a+\frac{1}{2}}{b} - n} \cdot y_{n-1},$$

или

$$y_n = \frac{\lambda - n}{\mu - n} \cdot y_{n-1}, \tag{3}$$

гдѣ, для сокращенія, мы положили

$$\left.\begin{aligned}\lambda &= \frac{a+b-\frac{1}{2}}{b}\\ \mu &= \frac{a+\frac{1}{2}}{b}.\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Уравненіе (3) выражаетъ весьма простую зависимость между возрастомъ n и двумя смежными указаніями таблицы смертности, то есть между n и числами y_{n-1} и y_n остающихся въ живыхъ въ возрастахъ $n-1$ и n лѣтъ при итогѣ y_0 новорожденныхъ. Чтобы выразить y_n въ функціи одного возраста n, подставляемъ послѣдовательно въ формулѣ (3) $n-1$, $n-2$, $n-3\ldots$ до n_o+1 на мѣсто n; получимъ рядъ равенствъ

$$\begin{aligned}
y_n \quad &= \frac{\lambda-n}{\mu-n}\cdot y_{n-1}\\
y_{n-1} &= \frac{\lambda-n+1}{\mu-n+1}\cdot y_{n-2}\\
y_{n-2} &= \frac{\lambda-n+2}{\mu-n+2}\cdot y_{n-3}\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
y_{n_o+2} &= \frac{\lambda-(n_o+2)}{\mu-(n_o+2)}\cdot y_{n_o+1}\\
y_{n_o+1} &= \frac{\lambda-(n_o+1)}{\mu-(n_o+1)}\cdot y_{n_o},
\end{aligned}$$

произведеніе которыхъ приводитъ къ слѣдующему значенію y_n:

$$(5) \qquad y_n = \frac{(\lambda-n)(\lambda-n+1)(\lambda-n+2)\ldots.(\lambda-n_o-1)}{(\mu-n)(\mu-n+1)(\mu-n+2)\ldots.(\mu-n_o-1)}\cdot y_{n_o}.$$

Эта формула выражаетъ *эмпирическій законъ смертности*; указаніе y_{n_o}, входящее въ нее, и соотвѣтствующее возрасту n_o, должно быть заимствовано изъ той таблицы смертности, къ которой примѣняемъ формулу (5); самый же возрастъ n_o не долженъ выходить изъ предѣловъ, между которыми уравн. (1) пред-

ставляетъ удовлетворительное приближеніе. Изъ формулы (5) видно, что, по употребленному нами пріёму, въ выраженіе закона смертности входятъ *три* количества постоянныя, именно λ, μ и y_{n_0}; первыя два, λ и μ, въ силу уравн. (4), опредѣляются очень просто чрезъ a и b; численныя величины этихъ трехъ параметровъ a, b и y_{n_0} будутъ зависѣть отъ данныхъ, входящихъ въ употребляемую таблицу смертности.

Выведенныя выше формулы не представляютъ особенныхъ преимуществъ предъ обыкновенными способами въ вычисленіяхъ, требующихъ совокупленія законовъ смертности съ началомъ сложнаго роста процентовъ. Но есть много такихъ задачъ о вѣроятностяхъ жизни человѣческой, рѣшеніе которыхъ облегчается при употребленіи этихъ формулъ. Ниже мы приведемъ тому нѣсколько численныхъ примѣровъ.

Заимствуя указанія изъ таблицы Денарсьё, мы уже нашли выше

$$a = 53^{\text{г.}}\ 2^{\text{м.}}, \qquad b = 7^{\text{м.}}\ 22^{\text{д.}},$$

почему, въ силу уравн. (4), будетъ

$$\lambda = 82{,}91 \text{ года}, \qquad \mu = 83{,}46 \text{ г.}$$

Далѣе, принявъ $n_0 = 10$ годамъ, найдемъ *(Таблица 1-ая)*

$$y_{n_0} = y_{10} = 880.$$

Подставляя эти три численныя значенія для λ, μ и y_{n_0} въ формулу (5), получимъ въ слѣдующемъ видѣ *эмпирическій законъ смертности*, приблизительно выражающій наблюденія *Депарсьё* для всѣхъ возрастовъ, заключающихся между 7-ю и 72-мя годами:

$$y_n = \frac{(82{,}91 - n)\,(82{,}91 - n + 1)\ldots(82{,}91 - 11)}{(83{,}46 - n)\,(83{,}46 - n + 1)\ldots(83{,}46 - 11)} \times 880.$$

Въ помѣщенной ниже табличкѣ приведены; для сравненія, наблюденныя и теоретическія указанія, вычисленныя по послѣдней

формулѣ; при этомъ я ограничился пятилѣтними возрастными періодами, начиная съ 10 лѣтъ и до 70. Въ послѣдней графѣ показаны уклоненія цифръ теоретическихъ отъ наблюденныхъ, выраженныя въ процентахъ наблюденныхъ:

Лѣта.	Оставалось въ живыхъ по Депарсьё.	Оставалось въ живыхъ по формулѣ.	Уклоненіе въ процентахъ.
10	880	880	
15	848	846	0,24%
20	814	811	0,36%
25	774	771	0,39%
30	734	737	0,41%
35	694	693	0,14%
40	657	657	0,00%
45	622	607	2,41%
50	581	567	2,41%
55	526	508	3,42%
60	463	465	0,43%
65	395	386	2,28%
70	310	337	8,71%

Изъ послѣдней графы усматриваемъ, что между указаніями Депарсьё и теоретическими числами существуетъ такое согласіе, которое нельзя не признать очень удовлетворительнымъ когда примемъ во вниманіе крайнюю измѣнчивость хода смертности въ различныхъ возрастахъ. Одно только послѣднее опредѣленіе, от-

носящееся къ преклоннымъ 70-ти лѣтамъ, приводитъ къ болѣе чувствительному уклоненію.

Мы замѣтили выше, что аналитическій законъ смертности могъ бы, нерѣдко, облегчить рѣшеніе нѣкоторыхъ вопросовъ о вѣроятностяхъ жизни человѣческой. Такъ, напримѣръ, на основаніи формулы (3) опредѣляемъ весьма просто, и независимо отъ указаній таблицы смертности, вѣроятность, что человѣкъ, въ возрастѣ $n - 1$ лѣтъ, проживетъ не менѣе одного года, то есть достигнетъ n лѣтъ. Вѣроятность эта будетъ вообще

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{\lambda - n}{\mu - n},$$

и, поэтому, въ примѣненіи къ таблицѣ Депарсьё,

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{82{,}91 - n}{83{,}46 - n}.$$

Полагая послѣдовательно въ этой формулѣ

$$n - 1 = 10,\ 15,\ 20\ \ldots\ldots\ 70 \text{ годамъ},$$

получимъ результаты, противъ которыхъ приведены для сравненія и соотвѣтственныя цифры, полученныя изъ таблицы Депарсьё.

Лѣта. $n-1$.	Вѣр. прожить не менѣе одного года по форм.	Та же вѣроятность по Депарсьё.	Лѣта $n-1$.	Вѣр. прожить не менѣе одного года по форм.	Та же вѣроятность по Депарсьё.
10	0,996	0,991	45	0,985	0,989
15	0,992	0,993	50	0,983	0,983
20	0,991	0,990	55	0,980	0,977
25	0,990	0,990	60	0,975	0,972
30	0,989	0,989	65	0,968	0,962
35	0,988	0,988	70	0,956	0,939
40	0,987	0,989			

И здѣсь обнаруживается тò же примѣчательное согласіе, за исключеніемъ послѣдняго 70-ти лѣтняго возраста, для котораго, впрочемъ, уклоненіе не доходитъ и до $2\frac{0}{0}$.

Рѣшимъ теперь слѣдующій вопросъ: положимъ, что въ какомъ либо вѣдомствѣ число чиновниковъ и возрастное ихъ распредѣленіе остаются неизмѣнными въ теченіе многихъ годовъ. Допустимъ, что каждый служащій, по достиженіи имъ n лѣтъ, выходитъ въ отставку съ правомъ на пенсію, а мѣсто его замѣщается другимъ лицомъ, младшимъ по возрасту. Пусть ежегодное число такихъ n лѣтнихъ служащихъ, поступающихъ въ пенсіонеры, будетъ N. Спрашивается, какъ велико будетъ вѣроятное число S пенсіонеровъ по прошествіи m лѣтъ?

Изобразимъ чрезъ

$$y_n,\ y_{n+1},\ y_{n+2}\ \ldots\ y_{n+m-1},\ y_{n+m}$$

указанія употребляемой таблицы смертности, соотвѣтствующія возрастамъ n, $n+1$, $n+2$ ... $n+m-1$, $n+m$, и примемъ

$$s = y_n + y_{n+1} + y_{n+2} + \ldots + y_{n+m};$$

легко сообразить, что искомый вѣроятный итогъ S пенсіонеровъ опредѣлится произведеніемъ $\frac{N}{y_n}\,.\,s$, почему и получимъ

$$S = \frac{N}{y_n}(y_n + y_{n+1} + y_{n+2} + \ldots + y_{n+m}).$$

Для опредѣленія суммы $y_n + y_{n+1} + \ldots + y_{n+m}$ беремъ извѣстныя выраженія для средней жизни V_n и V_{n+m}, именно

$$V_n = \tfrac{1}{2} + \frac{y_{n+1} + y_{n+2} + \ldots + y_{n+m} + y_{n+m+1} + \ldots}{y_n}$$

$$V_{n+m} = \tfrac{1}{2} + \frac{y_{n+m+1} + y_{n+m+2} + \ldots}{y_{n+m}};$$

исключеніе изъ этихъ двухъ уравненій суммы

$$y_{n+m+1} + y_{n+m+2} + y_{n+m+3} + \ldots$$

приведетъ къ равенству

$$s = (V_n + \tfrac{1}{2})\,y_n - (V_{n+m} - \tfrac{1}{2})\,y_{n+m},$$

въ слѣдствіе котораго имѣемъ

$$S = N\Big[V_n + \tfrac{1}{2} - (V_{n+m} - \tfrac{1}{2})\frac{y_{n+m}}{y_n}\Big].$$

Замѣнивъ V_n и V_{n+m} ихъ величинами (1), получимъ окончательно

$$(6)\qquad S = N\left[a + \tfrac{1}{2} - bn - \left(a - \tfrac{1}{2} - b(n+m)\right)\frac{y_{n+m}}{y_n}\right].$$

Положимъ для численнаго примѣра $n = 55$, $m = 10$; въ приведенной выше таблицѣ найдемъ $y_{55} = 508$, $y_{65} = 386$; пусть, кромѣ того, будетъ $N = y_{55} = 508$. По внесеніи въ формулу (6) этихъ значеній, а также величинъ

$$a = 53^{г.}\ 2^{м.},\quad b = 7^{м.}\ 22^{д.},$$

найдемъ $S = 5100$. Непосредственное сложеніе указаній

$$y_{55} + y_{56} + y_{57} + \ldots + y_{65}$$

по таблицѣ Депарсьё привело бы къ числу 5086; разность 14 двухъ опредѣленій, наблюденнаго отъ теоретическаго, составляетъ менѣе $\frac{1}{3}\frac{0}{0}$ дѣйствительной цифры 5086.

Приложимъ еще ту же формулу (6) къ опредѣленію суммы s 61-го указанія

$$s = y_{10} + y_{11} + y_{12} + \ldots + y_{70}.$$

Въ настоящемъ случаѣ имѣемъ

$$n = 10,\ m = 60,\ N = y_{10} = 880;$$

по внесеніи этихъ величинъ въ сказанную формулу, найдемъ $s = 38987$. Непосредственное же сложеніе указаній, взятыхъ изъ таблицы Депарсьё, приведетъ къ цифрѣ $s = 39130$; разность $39130 - 38987 = 143$ двухъ опредѣленій составляетъ съ небольшимъ $\frac{1}{3}\frac{0}{0}$ числа 39130.

Предлагаемъ еще слѣдующій вопросъ, который рѣшается очень просто на основаніи формулы (3):

Найти возрастъ $n'-1$, въ которомъ вѣроятность прожить не менѣе одного года относилась бы къ подобной вѣроятности въ другомъ, младшемъ, данномъ возрастѣ $n-1$, какъ дробное число k относится къ 1.

Условіе задачи, въ силу формулы (3), приводитъ къ слѣдующимъ равенствамъ:

$$\frac{y_{n'}}{y_{n'-1}} = \frac{\lambda - n'}{\mu - n'} = k.\ \frac{y_n}{y_{n-1}} = k\,\frac{\lambda - n}{\mu - n},$$

откуда

$$n' = n + \frac{(1-k)(\lambda - n)(\mu - n)}{\mu - k\lambda - (1-k)\,n}.$$

Приложимъ эту формулу къ таблицѣ Депарсьё, для которой мы нашли

$$\lambda = 82{,}91 \text{ год.}, \qquad \mu = 83{,}46 \text{ год.}$$

Пусть будетъ, напримѣръ, $n = 25$, $k = \frac{99}{100}$; получимъ $n' = 54{,}96$ года. Итакъ, вѣроятность прожить не менѣе одного года человѣку, которому отъ роду около 54 лѣтъ (то есть $54{,}96 - 1 = 53{,}96$), только на $\frac{1}{100}$ менѣе подобной вѣроятности въ возрастѣ 24 лѣтъ. Результатъ этотъ близко согласуется съ указаніями таблицы смертности Депарсьё. Дѣйствительно, по ней вторая вѣроятность равна

$$\frac{774}{782} = 0{,}9897\ldots,$$

а первая

$$\frac{526}{538} = 0{,}9777\ldots$$

Умноживъ $\frac{774}{782}$ на $\frac{99}{100}$ получимъ

$$\frac{774}{782} \cdot \frac{99}{100} = 0{,}9798\ldots$$

Наконецъ, вычтя изъ этого числа дробь $\frac{526}{538} = 0{,}9777\ldots$, найдемъ для разности двухъ опредѣленій самую незначительную дробь 0,0021.

Заключу статью указаніемъ на одно простое предложеніе, прямо вытекающее изъ введеннаго мною *основнаго свойства средней жизни.*

Положимъ, что имѣемъ двѣ или нѣсколько группъ, состоящихъ, каждая, изъ одинаковаго числа лицъ, и что сумма возрастовъ этихъ лицъ одна и та же для каждой группы. При такихъ двухъ условіяхъ окажется, что и средняя жизнь для каждой группы *) *одна и та же, и что слѣдовательно она не зависитъ отъ возрастнаго распредѣленія лицъ, составляющихъ группы.*

Легко видѣть, что справедливость этого предложенія есть непосредственное слѣдствіе линейнаго вида второй части уравненія (1).

---

*) Подъ *среднею жизнію группы* мы разумѣемъ общій итогъ числа лѣтъ, которыя остается прожить всѣмъ лицамъ, составляющимъ эту группу, раздѣленный на число этихъ самыхъ лицъ.

ТАБЛИЦА I.

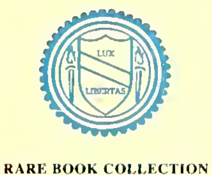
Лѣта.	Оставалось въ живыхъ.	Средняя жизнь.		Разности.	Лѣта.	Оставалось въживыхъ.	Средняя жизнь.		Разности.
		Год.	Мѣс.	Мѣс.			Год.	Мѣс.	Мѣс.
3	1000	47	8	— 5	29	742	34	8	7
4	970	48	1	— 2	30	734	34	1	8
5	948	48	3	1	31	726	33	5	7
6	930	48	2	2	32	718	32	10	8
7	915	48	0	4	33	710	32	2	8
8	902	47	8	4	34	702	31	6	7
9	890	47	4	6	35	694	30	11	8
10	880	46	10	7	36	686	30	3	8
11	872	46	3	7	37	678	29	7	8
12	866	45	8	9	38	671	28	11	9
13	860	44	11	9	39	664	28	2	8
14	854	44	2	8	40	657	27	6	9
15	848	43	6	8	41	650	26	9	8
16	842	42	10	8	42	643	26	1	9
17	835	42	2	8	43	636	25	4	9
18	828	41	6	8	44	629	24	7	8
19	821	40	10	7	45	622	23	11	9
20	814	40	3	8	46	615	23	2	9
21	806	39	7	7	47	607	22	5	8
22	798	39	0	7	48	599	21	9	8
23	790	38	5	8	49	590	21	1	8
24	782	37	9	7	50	581	20	5	8
25	774	37	2	7	51	571	19	9	8
26	766	36	7	8	52	560	19	1	7
27	758	35	11	7	53	549	18	6	8
28	750	35	4	8	54	538	17	10	7

Лѣта.	Оставалось въ живыхъ.	Средняя жизнь.		Разности.
		Год.	Мѣс.	Мѣс.
55	526	17	3	7
56	514	16	8	8
57	502	16	0	7
58	489	15	5	7
59	476	14	10	7
60	463	14	3	7
61	450	13	8	8
62	437	13	0	7
63	423	12	5	7
64	409	11	10	7
65	395	11	3	7
66	380	10	8	7
67	364	10	1	6
68	347	9	7	6
69	329	9	1	5
70	310	8	8	6
71	291	8	2	5
72	271	7	9	5
73	251	7	4	5
74	231	6	11	5
75	211	6	6	5
76	192	6	1	4
77	173	5	9	5
78	154	5	4	4
79	136	5	0	4
80	118	4	8	3
81	101	4	5	4
82	85	4	1	3
83	71	3	10	4
84	59	3	6	4
85	48	3	2	3
86	38	2	11	3
87	29	2	8	4
88	22	2	4	4
89	16	2	0	3
90	11	1	9	3
91	7	1	6	3
92	4	1	3	3
93	2	1	0	6
94	1	0	6	6
95	0	0	0	

ТАБЛИЦА II.

Лѣта.	Средн. жизнь по Депарсьё.		Средняя жизнь по формулѣ.			Разности			Лѣта.	Средн. жизнь по Депарсьё.		Средняя жизнь по формулѣ.			Разности.		
	Год.	Мѣс.	Год.	Мѣс.	Дни.	Год.	Мѣс	Дни.		Год.	Мѣс.	Год.	Мѣс.	Дни.	Год.	Мѣс.	Дни.
0			53	2					26	36	7	36	5	7		+1	23
1			52	6	8				27	35	11	35	9	16		+1	14
2			51	10	17				28	35	4	35	1	24		+2	6
3	47	8	51	2	25	—3	6	25	29	34	8	34	6	2		+1	28
4	48	1	50	7	3	—2	6	3	30	34	1	33	10	11		+2	19
5	48	3	49	11	12	—1	8	12	31	33	5	33	2	19		+2	11
6	48	2	49	3	20	—1	1	20	32	32	10	32	6	28		+3	2
7	48	0	48	7	29		—7	29	33	32	2	31	11	6		+2	24
8	47	8	48	0	7		—4	7	34	31	6	31	3	14		+2	16
9	47	4	47	4	15			—15	35	30	11	30	7	23		+3	7
10	46	10	46	8	24		+1	6	36	30	3	30	0	1		+2	29
11	46	3	46	1	2		+1	28	37	29	7	29	4	9		+2	21
12	45	8	45	5	10		+2	20	38	28	11	28	8	18		+2	12
13	44	11	44	9	19		+1	11	39	28	2	28	0	26		+1	4
14	44	2	44	1	27			+ 3	40	27	6	27	5	4			+26
15	43	6	43	6	5			— 5	41	26	9	26	9	13			—13
16	42	10	42	10	14			—14	42	26	1	26	1	21			—21
17	42	2	42	2	22			—22	43	25	4	25	6	0		—2	
18	41	6	41	7	0		—1		44	24	7	24	10	8		—3	8
19	40	10	40	11	9		—1	9	45	23	11	24	2	16		—3	16
20	40	3	40	3	17			—17	46	23	2	23	6	25		—4	25
21	39	7	39	7	26			—26	47	22	5	22	11	3		—6	3
22	39	0	39	0	4			—4	48	21	9	22	3	11		—6	11
23	38	5	38	4	12			+18	49	21	1	21	7	20		—6	20
24	37	9	37	8	21			+ 9	50	20	5	20	11	28		—6	28
25	37	2	37	1	1			+29	51	19	9	20	4	6		—7	6

Лѣта.	Средн. жизнь по Депарсьё.		Средняя жизнь по формулѣ.			Разности.			Лѣта.	Средн. жизнь по Депарсьё.		Средняя жизнь по формулѣ.			Разности.		
	Год.	Мѣс.	Год.	Мѣс.	Дни.	Год.	Мѣс.	Дни.		Год.	Мѣс.	Год.	Мѣс.	Дни.	Год.	Мѣс.	Дни.
52	19	1	19	8	15		—7	15	74	6	11	5	6	19	+1	4	11
53	18	6	19	0	23		—6	23	75	6	6	4	10	27	+1	7	3
54	17	10	18	5	1		—7	1	76	6	1	4	3	5	+1	9	25
55	17	3	17	9	10		—6	10	77	5	9	3	7	14	+2	1	16
56	16	8	17	1	18		—5	18	78	5	4	2	11	22	+2	4	8
57	16	0	16	5	27		—5	27	79	5	0	2	4	0	+2	8	
58	15	5	15	10	5		—5	5	80	4	8	1	8	9	+2	11	21
59	14	10	15	2	13		—4	13	81	4	5	1	0	17	+3	4	13
60	14	3	14	6	22		—3	22	82	4	1	0	4	26	+3	8	4
61	13	8	13	11	0		—3		83	3	10	0	0	0	+3	10	
62	13	0	13	3	8		—3	8	84	3	6						
63	12	5	12	7	17		—2	17	85	3	2						
64	11	10	11	11	25		—1	25	86	2	11						
65	11	3	11	4	3		—1	3	87	2	8						
66	10	8	10	8	12			—12	88	2	4						
67	10	1	10	0	20			+10	89	2	0						
68	9	7	9	4	29		+2	1	90	1	9						
69	9	1	8	9	7		+3	23	91	1	6						
70	8	8	8	1	15		+6	15	92	1	3						
71	8	2	7	5	24		+8	6	93	1	0						
72	7	9	6	10	2		+10	28	94	0	6						
73	7	4	6	2	10	+1	1	20	95	0	0						


LUX
LIBERTAS